# 第 13-14 章 概率与贝叶斯网络 习题解答

## 1. 题目 1

**题意：** 已知 $P(a) = 0.3, P(b \mid a) = 0.2, P(c \mid a) = 0.5$。比较 $P(a \wedge b)$ 与 $P(a \wedge c)$。

根据乘法公式 $P(x \wedge y) = P(x)P(y|x)$：

$$P(a \wedge b) = P(a) \cdot P(b \mid a) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$
$$P(a \wedge c) = P(a) \cdot P(c \mid a) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$$

因为 $0.06 < 0.15$，所以 $\boldsymbol{P(a \wedge b) < P(a \wedge c)}$。

**答案：B**

## 2. 题目 2

**题意：** $P(a \vee b) = 0.7, P(a) = 0.4, P(b) = 0.5$，求 $P(a \wedge b)$。

根据概率加法公式（容斥原理）：

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$$

代入已知数值：

$$0.7 = 0.4 + 0.5 - P(a \wedge b)$$
$$P(a \wedge b) = 0.9 - 0.7 = 0.2$$

**答案：0.2**

## 3. 题目 3

**数据：** 全联合概率分布表如下（Cavity, Toothache, Catch）：

| | T, Catch | T, ¬ Catch | ¬ T, Catch | ¬ T, ¬ Catch |
|---|---|---|---|---|
| Cavity | 0.108 | 0.012 | 0.072 | 0.008 |
| ¬ Cavity | 0.016 | 0.064 | 0.144 | 0.576 |

**1. 计算 $\boldsymbol{P(\text{Toothache} \vee \neg\ \text{Cavity})}$**

利用补集思想：$P(A) = 1 - P(\neg A)$。 事件的补集是 $\neg\ \text{Toothache} \wedge \text{Cavity}$。 对应表格中的项为：(Cavity, ¬ T, Catch) 和 (Cavity, ¬ T, ¬ Catch)。

$$P(\neg T \wedge \text{Cav}) = 0.072 + 0.008 = 0.080$$

$$P(T \vee \neg\ \text{Cav}) = 1 - 0.080 = 0.92$$

**2. 计算 $\boldsymbol{P(\neg\ \text{toothache} \vee \text{catch})}$**

补集是 $\text{toothache} \wedge \neg\ \text{catch}$。 对应表格列为 (T, ¬ Catch)，即第 2 列。

$$P(T \wedge \neg\ \text{Catch}) = 0.012(\text{Cav}) + 0.064(\neg\ \text{Cav}) = 0.076$$

$$P(\neg T \vee \text{Catch}) = 1 - 0.076 = 0.924$$

**3. 计算 $P(\text{Toothache} \vee \neg\ \text{Cavity} \mid \neg\ \text{catch})$ 和 $P(\neg\ \text{catch} \mid \text{Toothache} \vee \neg\ \text{Cavity})$**

令 $A = \text{Toothache} \vee \neg\ \text{Cavity}, B = \neg\ \text{catch}$。

- **计算 $P(B)$**: Sum of all ¬ Catch columns (Col 2, Col 4). $P(B) = (0.012 + 0.064) + (0.008 + 0.576) = 0.076 + 0.584 = 0.66$
- **计算 $P(A \wedge B)$**: 在 ¬ Catch 列中满足 $T \vee \neg\ \text{Cav}$ 的项。
  - (Cav, T, ¬ C): 0.012 (满足 T)
  - (¬ Cav, T, ¬ C): 0.064 (满足 T)
  - (¬ Cav, ¬ T, ¬ C): 0.576 (满足 ¬ Cav)
  - (Cav, ¬ T, ¬ C): 0.008 (不满足，既无 T 也无¬Cav)

  Sum $= 0.012 + 0.064 + 0.576 = 0.652$

结果 1: $P(A \mid B) = \frac{0.652}{0.66} \approx 0.9879$ 结果 2: $P(B \mid A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)} = \frac{0.652}{0.92} \approx 0.7087$ (其中 P(A) 来自第 1 小问)

**4. 判断 Cavity 与 Toothache 是否独立**

$$P(\text{Cav}) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$$
$$P(\text{Toothache}) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$
$$P(\text{Cav} \wedge \text{T}) = 0.108 + 0.012 = 0.12$$

检验：$P(\text{Cav}) \times P(\text{T}) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$。 因为 $0.12 \neq 0.04$，所以两者 **不独立**。

## 4. 题目 4

**题意：** 设 $X, Y$ 条件独立于 $Z$（即 $X \perp Y \mid Z$），$Y, W$ 条件独立于 $Z$（即 $Y \perp W \mid Z$）。问 $X, W$ 是否条件独立于 $Z$?

**结论：不能。** 条件独立性不具备传递性。

**反例证明：** 假设 $Z$ 是一个公平的硬币投掷（0 或 1）。 令 $X = Z$（$X$ 完全依赖于 $Z$）。 令 $W = Z$（$W$ 完全依赖于 $Z$）。 令 $Y$ 是一个与 $X, W, Z$ 都完全独立的随机变量（例如掷骰子）。

1. **检查 $X, Y$ 关于 $Z$ 的独立性**：给定 $Z$， $X$ 变为常数。常数与任何变量独立，故成立。
2. **检查 $Y, W$ 关于 $Z$ 的独立性**：同理，给定 $Z$，$W$ 变为常数，故成立。
3. **检查 $X, W$ 关于 $Z$ 的独立性**： 给定 $Z$，$X$ 和 $W$ 的值完全确定且相同（例如若 $Z = 1$，则 $X = 1, W = 1$）。虽然在 $Z$ 固定的情况下它们的方差为 0（技术上可视作独立），但如果我们考虑一种因果结构： 令 $X$ 和 $W$ 为同一变量的两个副本。显然它们是强相关的。

   更直观的例子：$X$ 和 $W$ 互为因果或由共同隐变量控制，而它们都与 $Y$ 独立。仅仅知道它们分别与 $Y$ 独立，无法切断 $X$ 和 $W$ 之间的联系。

## 5. 题目 5

**题意：** 罕见病检测。$P(D) = 0.001$。 检测 A： $P(+|D) = 0.95, P(+|\neg D) = 0.05$。 检测 B： $P(+|D) = 0.90, P(+|\neg D) = 0.10$。

**a. 单次检测 A 为阳性，求 $P(D|A+)$**

使用贝叶斯公式：

$$P(D|A+) = \frac{P(A+|D)P(D)}{P(A+)}$$

$$\begin{aligned} P(A+) &= P(A+|D)P(D) + P(A+|\neg D)P(\neg D) \\ &= 0.95 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999 \\ &= 0.00095 + 0.04995 = 0.0509 \end{aligned}$$

$$P(D|A+) = \frac{0.00095}{0.0509} \approx 0.0187(1.87\%)$$

**b. 两次检测 A 和 B 均为阳性，求 $P(D|A+, B+)$**

由于检测独立（Naive Bayes 假设）：

$$P(A+, B+ \mid D) = 0.95 \times 0.90 = 0.855$$

$$P(A+, B+ \mid \neg D) = 0.05 \times 0.10 = 0.005$$

$$\begin{aligned} P(D \mid A+, B+) &= \frac{P(A+, B+ \mid D)P(D)}{P(A+, B+ \mid D)P(D) + P(A+, B+ \mid \neg D)P(\neg D)} \\ &= \frac{0.855 \times 0.001}{0.855 \times 0.001 + 0.005 \times 0.999} \\ &= \frac{0.000855}{0.000855 + 0.004995} \\ &= \frac{0.000855}{0.00585} \approx 0.1462(14.62\%) \end{aligned}$$

**c. 解释**

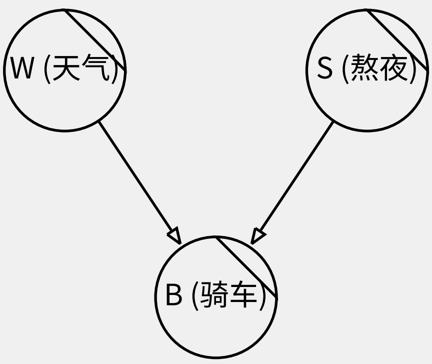
联合检测通过引入第二次独立测试，极大地降低了**假阳性率**（从 0.05 降至 $0.05 \times 0.10 = 0.005$）。虽然真阳性率也略有下降，但分母中占主导地位的假阳性项（由 $P(\neg D)$ 权重放大）被大幅削减，从而显著提升了后验概率。

## 6. 题目 6

**场景：** 骑车(B) 取决于 天气(W) 和 熬夜(S)。$P(W = \text{Sun}) = 0.7, P(S = \text{Yes}) = 0.4$。 CPT 已知。

**a. 贝叶斯网络与 CPT**

结构：$W \to B \leftarrow S$ (V-structure)




**条件概率表 (CPT) for B:**

| W (天气) | S (熬夜) | P(B=是 \| W, S) |
|---|---|---|
| 晴 (Sun) | 否 (No) | 0.9 |
| 晴 (Sun) | 是 (Yes) | 0.6 |
| 雨 (Rain) | 否 (No) | 0.2 |
| 雨 (Rain) | 是 (Yes) | 0.1 |

**b. 推理：已知骑车(B=Yes)，求天气概率**

我们需要计算 $P(W \mid B = \text{Yes})$。根据贝叶斯法则：$P(W|B) = P(B|W)\frac{P(W)}{P(B)}$。

首先计算边缘概率 $P(B = \text{Yes})$。

$$P(B = y) = \sum_{w,s} P(B = y|w, s)P(w)P(s)$$

因 W 和 S 独立，联合概率直接相乘。

1. $W = \text{Sun}, S = \text{No}: 0.9 \times 0.7 \times 0.6 = 0.378$
2. $W = \text{Sun}, S = \text{Yes}: 0.6 \times 0.7 \times 0.4 = 0.168$
3. $W = \text{Rain}, S = \text{No}: 0.2 \times 0.3 \times 0.6 = 0.036$
4. $W = \text{Rain}, S = \text{Yes}: 0.1 \times 0.3 \times 0.4 = 0.012$

$$P(B = \text{Yes}) = 0.378 + 0.168 + 0.036 + 0.012 = 0.594$$

计算 $P(W = \text{Sun} \mid B = \text{Yes})$: 分子为 W=Sun 的所有情况之和（项 1 + 项 2）：

$$P(B = y, W = \text{Sun}) = 0.378 + 0.168 = 0.546$$

$$P(W = \text{Sun} \mid B = \text{Yes}) = \frac{0.546}{0.594} \approx 0.919$$

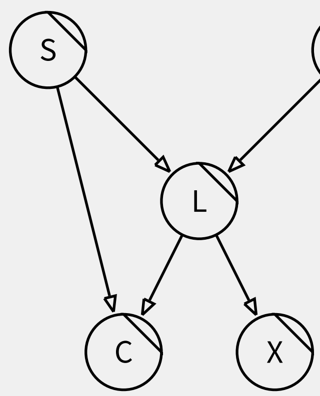
同理，$P(W = \text{Rain} \mid B = \text{Yes}) = \frac{0.036+0.012}{0.594} \approx 0.081$。

**结论：这天最可能是晴天。**

## 7. 题目 7

**智能健康助手：** 变量 S(吸烟), G(基因), L(肺癌), C(咳嗽), X(胸片)。 关系：$S \to L, G \to L, S \to C, L \to C, L \to X$。

**问题 1：贝叶斯网络图**




**问题 2：概率推理 $P(L = \text{Yes} \mid C = \text{No}, X = \text{Yes})$**

令 $\alpha$ 为归一化常数。我们需要计算 $P(L=y, C=n, X=y)$ 和 $P(L=n, C=n, X=y)$。 公式分解：$P(S, G, L, C, X) = P(S)P(G)P(L|S, G)P(C|L, S)P(X|L)$。 求和消除 S, G：

$$P(L, C, X) = P(X|L)\sum_S \sum_G P(C|L, S)P(L|S, G)P(S)P(G)$$

**Case 1: L = Yes** (且 $C=n, X=y$) 因子 $P(X=y|L=y) = 0.9$。 内部求和 $\Sigma_{L=y}$:

- $S=y, G=h$: $P(C=n|L=y, S=y)P(L=y|S=y, G=h)P(S=y)P(G=h) = 0.2 \times 0.6 \times 0.3 \times 0.2 = 0.0072$
- $S=y, G=l$: $0.2 \times 0.3 \times 0.3 \times 0.8 = 0.0144$
- $S=n, G=h$: $P(C=n|L=y, S=n)P(L=y|S=n, G=h)P(S=n)P(G=h) = 0.4 \times 0.4 \times 0.7 \times 0.2 = 0.0224$
- $S=n, G=l$: $0.4 \times 0.1 \times 0.7 \times 0.8 = 0.0224$

$\Sigma_{L=y} = 0.0072 + 0.0144 + 0.0224 + 0.0224 = 0.0664$ $P(L=y, C=n, X=y) = 0.9 \times 0.0664 = 0.05976$

**Case 2: L = No** (且 $C=n, X=y$) 因子 $P(X=y|L=n) = 0.1$。 内部求和 $\Sigma_{L=n}$:

- $S=y, G=h$: $P(C=n|L=n, S=y)P(L=n|S=y, G=h)P(S=y)P(G=h) = 0.7 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.2 = 0.0168$
- $S=y, G=l$: $0.7 \times 0.7 \times 0.3 \times 0.8 = 0.1176$
- $S=n, G=h$: $P(C=n|L=n, S=n)P(L=n|S=n, G=h)P(S=n)P(G=h) = 0.9 \times 0.6 \times 0.7 \times 0.2 = 0.0756$
- $S=n, G=l$: $0.9 \times 0.9 \times 0.7 \times 0.8 = 0.4536$

$\Sigma_{L=n} = 0.0168 + 0.1176 + 0.0756 + 0.4536 = 0.6636$ $P(L=n, C=n, X=y) = 0.1 \times 0.6636 = 0.06636$

**最终归一化：**

$$\begin{aligned} P(L = \text{Yes} \mid ...) &= \frac{0.05976}{0.05976 + 0.06636} \\ &= \frac{0.05976}{0.12612} \approx 0.4738 \end{aligned}$$

**答案：47.38%**